Chapitre 7 : Vecteurs

I) Découvrir les vecteurs

a) Translations et vecteurs

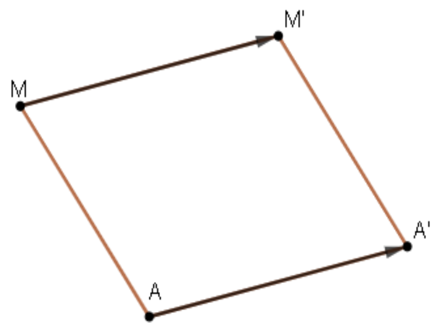
Définition : M et M’ sont deux points distincts du plan.
La translation qui transforme M en M’ est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a trois caractéristiques :

- Une direction, celle de la droite (MM’)
- Un sens, celui de M vers M’
- Une norme, notée $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ qui est la longueur MM’.

Exemple : A’ est l’image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
2 cas :

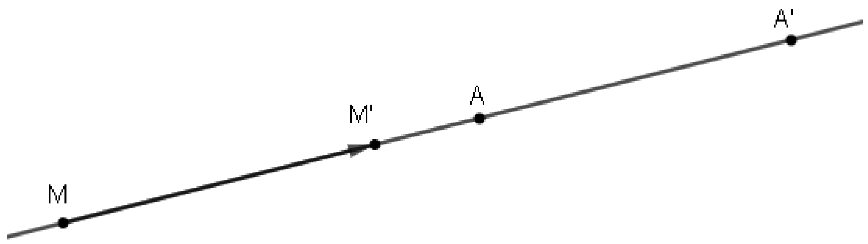
- A n’appartient pas à la droite (MM’).

A’ est le point tel que MM’A’A est un parallélogramme.



- A appartient à la droite (MM’).

A’ est le point de la droite (MM’) tel que MM’=AA’ et tel que le sens de M vers M’ est le même que celui de A vers A’.



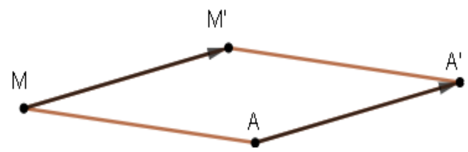
Cas particulier :
La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est le **vecteur nul** noté $\vec{0}$. On a $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

b) Égalité de deux vecteurs

Définition : Si la translation qui transforme M en M’ transforme également A en A’ alors les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont égaux.
On note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

Remarque : Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ ont même direction, même sens et même norme.

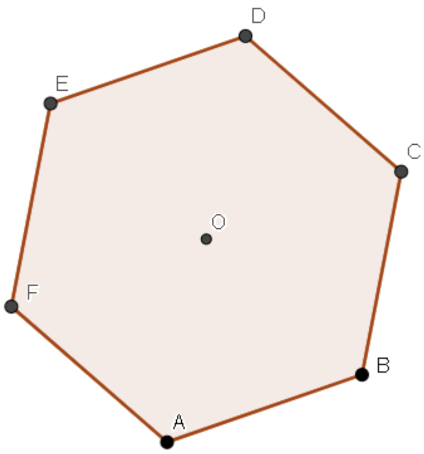
Propriété : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ si et seulement si le quadrilatère MM’A’A est un parallélogramme, éventuellement aplati.



Remarque : il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Ce vecteur peut être noté $\vec{u}$.
$\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

> Définition :
> La translation qui transforme le point M' en M est la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$. Le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est appelé l'**opposé** du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
> On a $\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{MM'}$

Remarque : $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{MM'}$ ont même direction et même norme mais sont de sens contraire.

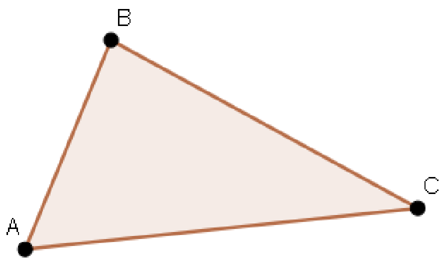


Exercice 1 : ABCDEF est un hexagone régulier de centre O.

a) Citer plusieurs vecteurs égaux à $\overrightarrow{BC}$.
b) Déterminer le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine F.
c) Nommer un représentant du vecteur $\overrightarrow{BF}$ autre que lui-même.
d) Quelle est l'image du point F par la translation $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 2 : Construire des vecteurs

ABC est un triangle.



a) Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine B.
b) Placer le point D tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD.
d) Citer un vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 : Construire des vecteurs

a) Tracer un triangle ABC et construire le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA}$.
b) Placer le point L tel que les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient opposés.
c) Démontrer que le quadrilatère LBKA est un parallélogramme.

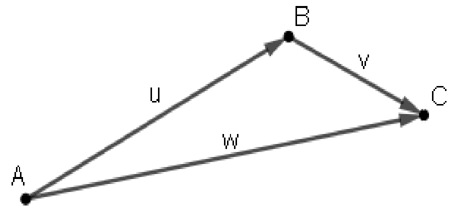
Exercice 4 : ABCD et ABEF sont des parallélogrammes.
a) Construire une figure.
b) Quelles sont les images des points D et F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?
c) Démontrer que CDFE est un parallélogramme.

II) Opérations sur les vecteurs

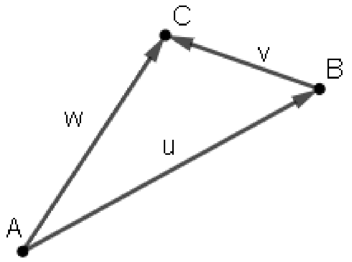
a) Vecteurs somme

Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

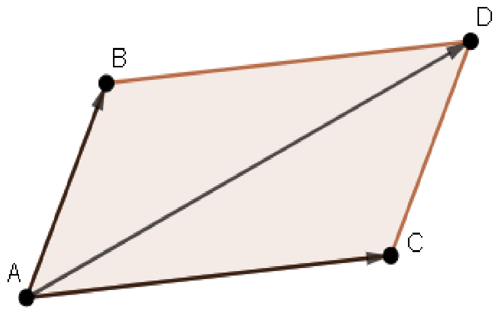
Exemple : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$



Remarque : L'ordre n'a pas d'influence sur l'enchaînement de deux translations : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



Propriété : Relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Propriété : Règle du parallélogramme :
A, B, C et D sont quatre points : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Preuve : ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Exercice 5 : ABCD est un rectangle de centre I.

a) Construire le représentant d'origine C du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI}$.
b) À quel vecteur de la figure le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ? Prouver cette conjecture.

Exercice 6 : ABCD est un rectangle de centre I.
Donner un vecteur égal à chaque somme :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC}$
c) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$
d) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DI}$

Exercice 7 : ABC est un triangle tel que AB = 5 cm, AC = 4 cm et BC = 6 cm.

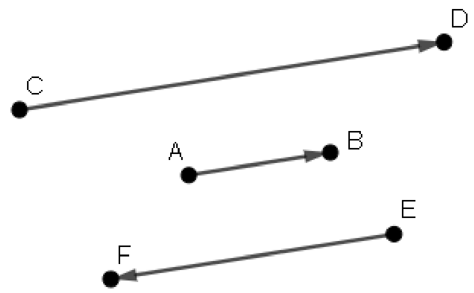
a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
b) Construire le point P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
c) À quel vecteur est égal la somme $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$?

b) Produit d'un vecteur par un réel

Définition : On considère un vecteur $\vec{u}$ et k un nombre réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- La même direction que $\vec{u}$
- Le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$
- Une norme égale à $k\|\vec{u}\|$ si $k > 0$ ou $-k\|\vec{u}\|$ si $k < 0$.

Exemple :
On a $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AB}$



Cas particuliers :

- $0 \times \vec{u} = \vec{0}$
- $k \times \vec{0} = \vec{0}$

Propriétés admises : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k et k' deux nombres réels non nuls. On a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exercice 8 : ABC est un triangle quelconque.

a) Construire un représentant du vecteur $2\overrightarrow{AB}$.
b) Construire un représentant du vecteur $-0{,}5\overrightarrow{AB}$.
c) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

III) Coordonnées d'un vecteur

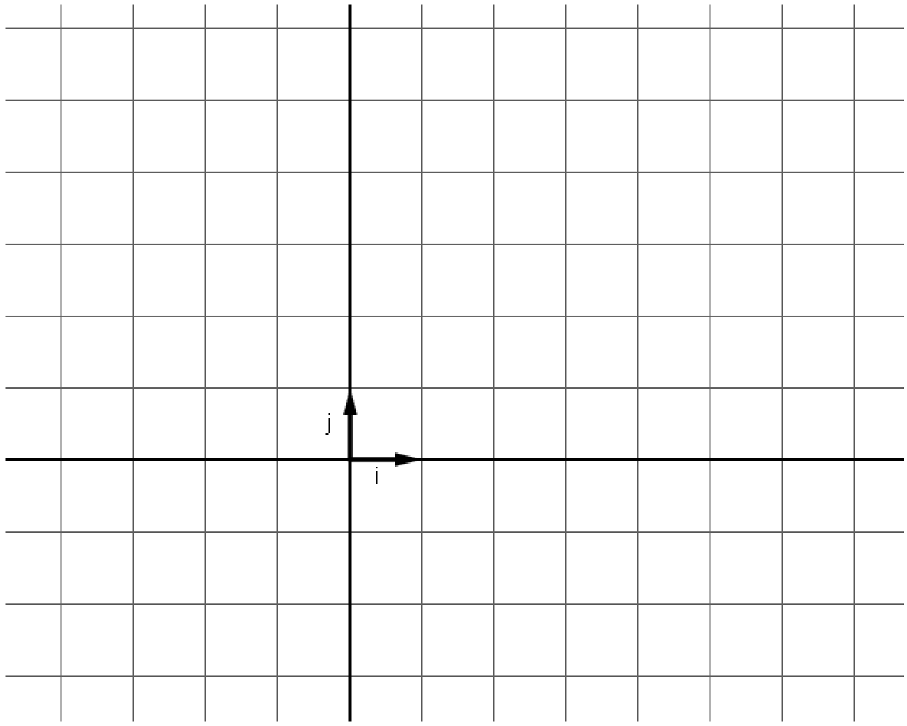
a) Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Définitions :

- Un repère orthonormé (O, I, J) est aussi noté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.
- On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée.
- Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exemples :
$\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$
$\vec{v} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$
$\vec{w} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$



Cas particuliers :
$\vec{\imath}$ a pour coordonnées $\binom{1}{0}$

$\vec{\jmath}$ a pour coordonnées $\binom{0}{1}$

Propriété : On considère un vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriétés : On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour norme $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

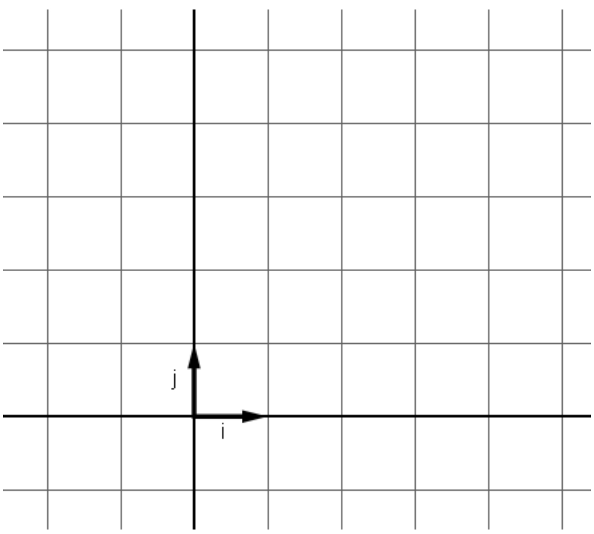
Exemple : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $A(3; 1)$, $B(4; 4)$ et $C(1; 2)$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ……………………………………..

$\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées ……………………………………..

$\overrightarrow{AB}$ a pour norme ……………………………………..

$\overrightarrow{CD}$ a pour norme ……………………………………..



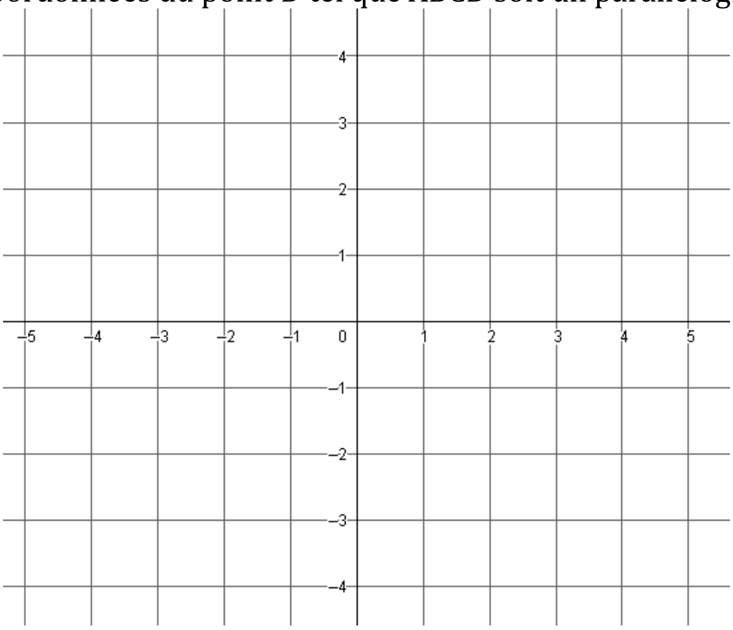
Exercice 9 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $A(3;2), B(6;1), C(4;5)$ et $D(0;1)$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$ puis leur norme.

Exercice 10 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $A(2;1), B(3;4), C(6;5)$ et $D(5;2)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
b) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ABCD ?
c) Montrer que $AB = BC$.
d) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ABCD ?

Exercice 11 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $A(1;3), B(4;-1)$.

a) Placer les points A et B.
b) Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et donner ses coordonnées.
c) Construire le vecteur AC de coordonnées $\binom{-3}{-2}$.
d) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.



b) Coordonnées d'un vecteur et opérations

- Somme de deux vecteurs

Propriété : On considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{x+x'}{y+y'}$.

Exemple : Soient $\vec{u}\binom{3}{-2}$ et $\vec{v}\binom{-1}{5}$. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées ………………………………………………

- Produit d'un vecteur par un réel

Propriété : On considère un vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ et k un nombre réel.
Le vecteur $\overrightarrow{ku}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$.

Exemple : Soit $\vec{u}\binom{-3}{2}$. Le vecteur $-5\vec{u}$ a pour coordonnées ……………………………………………….

Remarque : Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{ku}$ sont proportionnelles.

Exercice 12 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{-4}{3}$ et $\vec{v}\binom{6}{-9}$.

a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
b) Calculer les coordonnées du vecteur $\frac{3}{2}\vec{v}$.
c) Soit $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$. Calculer ses coordonnées et sa norme.

Exercice 13 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{-2}$ et $\vec{v}\binom{2}{1}$ et les points $D(3;-2)$ et $E(11;-3)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$
b) Calculer la norme de $\overrightarrow{DE}$.

IV) Colinéarité de deux vecteurs

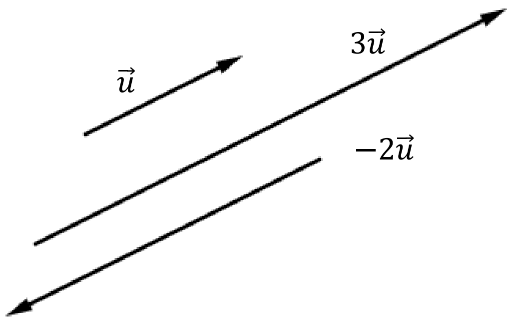
a) Vecteurs colinéaires

Définition :
Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarques :

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemples :
Les vecteurs $\vec{u}$ et $3\vec{u}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont colinéaires.



a) Déterminant de deux vecteurs

Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Propriété : On considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Preuve : ……

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

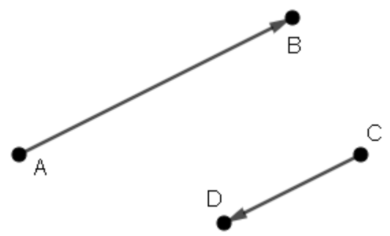
………

………

………

………

<u>Propriété</u> : Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.



<u>Preuve</u> : ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

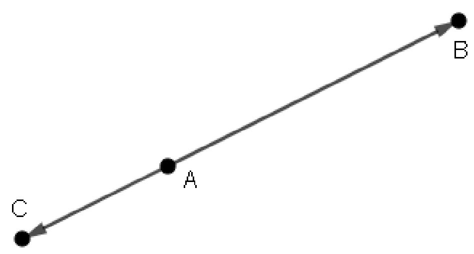
………

………

………

………

<u>Propriété</u> : Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



<u>Preuve</u> : ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

Exercice 14 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J). ABC est un triangle. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

a) Construire une figure.
b) Démontrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
c) En déduire que les points A, C et N sont alignés.

Exercice 15 : On se place dans une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
On considère deux vecteurs $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 7\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.
b) Calculer le déterminant du vecteur $2\vec{u}$ et du vecteur $3\vec{v}$.
c) Calculer le déterminant du vecteur $-\vec{u}$ et du vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Exercice 16 : On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $A(-2;3), B(4;2) et\ D\left(3;-\frac{1}{2}\right)$.
Démontrer que les droites (AB) et (OD) sont parallèles.